UNIVERSITÀ DI CORSICA PASQUALE PAOLI

PAES UE3 2013-2014

Tutorat physique : Séance n°6 ; complément de mécanique / diffusion libre de particules (fait par C. Voyant)

Calculettes inutiles. Pour chaque QCM, indiquer quelles sont toutes les propositions exactes et uniquement les propositions exactes.

Données numériques :

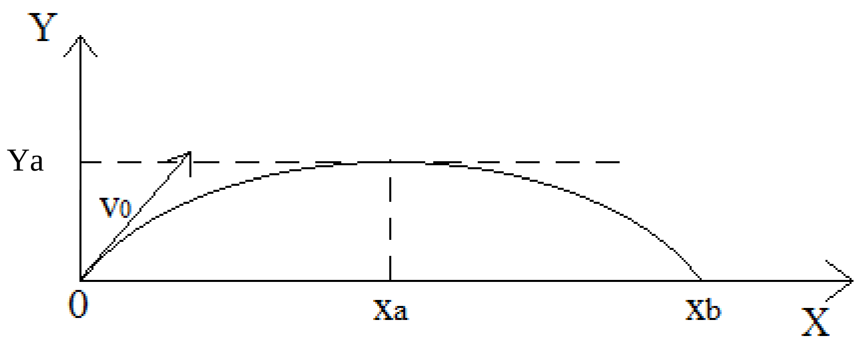
$\frac{3}{4.3,6} = 0,2$ $\quad \ln(\frac{4}{5})$=-0,2 $\quad 1/(5.\sqrt{2}) = 0,14$
Na = 6.10^{23} mol^{-1}
Accélération de la pesanteur ; g = 10 m.s^{-2}

Masse molaire (g):
Hémoglobine = 70 Kg/mol

QCM 1

Chute d'un corps soumis à son propre poids (mécanique du point)

Un solide *M* de masse *m* est lancé vers le haut dans une direction faisant un angle de 45° avec la verticale, $\|\overrightarrow{v_0}\|$ =1 m.s^{-1}. Les frottements dus à l'air sont négligeables. Le point de coordonnée (Xa,Ya) est le point culminant de la trajectoire et Xb le point de chute du solide.



a) on a $\vec{v}(t).\vec{u}_x - \vec{v}(t).\vec{u}_y = 10.t\ \forall t \in [0, t_{max}]$, $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ étant des vecteurs unitaires dirigés suivant les deux axes X et Y

Vrai, on applique le PFD, soit $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, ce qui revient à dire :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0\cos(45) \\ -gt + v_0\sin(45) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -gt + \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\vec{v}(t).\vec{u}_x - \vec{v}(t).\vec{u}_y = \frac{\sqrt{2}}{2} + gt - \frac{\sqrt{2}}{2} = 10t$$

Ce genre d'exercice est déstabilisant car il ne correspond pas vraiment à ce qui a été fait en cours. Cependant, lors du concours par exemple, il serait souhaitable de le faire mais en dernier lieu. C'est sur les exercices difficiles que les candidats se départagent, les faciles, tout le monde ou presque arrivent à les faire !!

b) $\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2.t \\ -5.t^2 + \sqrt{2}/2.t \end{pmatrix}$

Vrai , il suffit d'intégrer une fois de plus l'équation du a)

c) l'équation de la trajectoire du solide est y = 10.x.($\frac{1}{10}$-x)

Vrai, on a x(t)= $\sqrt{2}/2.t$ donc t = x .$2/\sqrt{2}$, on remplace cette valeur dans l'équation paramétrique de y(t) et on obtient y = -10.x²+x = 10.x.($\frac{1}{10}$-x)

d) on a $\frac{X_a}{Y_a} = 1$

Faux, le point de coordonnée (Xa,Ya) est atteint quand $v_y(t_a)$= 0, donc au temps t_a=0,07s. Au bout de ce temps

$$\overrightarrow{OM}(t_a) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2.10} \\ -5.\left(\frac{2}{4.100}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2.10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{1}{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_a \\ Y_a \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{X_a}{Y_a} = 2$$

Remarquons que pour déterminer les coordonnées du point A (qui est un extremum), il est aussi possible d'utiliser l'équation f(x)= y = 10.x.($\frac{1}{10}$-x) et de dire qu'il y a extrémum quand f'(x) s'annule, on a donc f'(Xa)=0 et f(Xa)= Ya.

e) le temps de vol dure moins de 1s et le mobile parcourt 10cm

Vrai, pour trouver X_b il suffit de considérer la position du mobile au moment où la coordonnée y de la trajectoire s'annule. Ce moment arrive après le temps total du vol t_B qui est calculable à partir de $y(t_B)$=0, soit $-5.t_B{}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.t_B = 0 \Rightarrow t_B = \left(\frac{1}{5.\sqrt{2}}\right)$=0,14s

Au bout du temps t_B le mobile sera en (X_B,0), on obtient

$x(t_B)=X_B=\sqrt{2}/2.t_B=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{5.\sqrt{2}}\right)$=10cm

Noter que si l'on utilise le fait que $\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$ alors $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

QCM 2

Questions de cours sur la diffusion

1) le débit correspond à un nombre de moles par unité de temps et de surface.

Faux, uniquement par unité de temps, le débit correspond à l'intensité du flux, à ne pas confondre avec la densité du flux

2) la dimension du coefficient de diffusion est $[L]^2[T]^{-1}$.

Vrai, utiliser la loi de Fick pour trouver l'équation aux dimensions

3) la diffusion de solvant et de soluté tend à égaliser les potentiels chimiques.
Vrai, c'est la définition de l'équilibre des concentrations

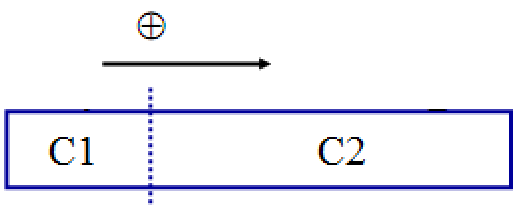
4) en absence de membrane une diffusion de soluté s'accompagne d'une diffusion de solvant
Vrai, de plus, les deux flux sont de sens opposés

5) la première loi de Fick ne s'applique pas au cas de la diffusion à travers une membrane
Faux, c'est la même loi qui régit les phénomènes de diffusion à travers une membrane et la diffusion libre sans membrane

QCM 3

Utilisation classique de la loi de Fick

Soit deux enceintes (parallélépipèdes rectangles de section 1m² et de volume $V1=0{,}5m^3$ et $V2=1{,}5m^3$) remplies d'un solvant et séparées par une membrane perméable aux solutés de 1mm d'épaisseur, les concentrations respectives en solutés (NaCl) à t=0 sont $C_1=0.5mM$ et $C_2=0.1mM$. On prend le coefficient de diffusion du soluté (NaCl) dans la solution égale $D=10^{-10}m^2.s^{-1}$



1) il y a un flux de soluté allant de 1 vers 2
Vrai, le déplacement de solutés se fait du milieu le plus concentré vers le moins concentré

2) la densité de flux traversant la membrane vaut $0{,}4.10^{-4}$ $mmol.s^{-1}.m^{-2}$
Vrai, on a $\vec{j} = -D.\frac{\partial C}{\partial x}\overrightarrow{u_x} = -D.\frac{\Delta C}{\Delta x}\overrightarrow{u_x} = 10^{-10}.\frac{0{,}4.10^3}{10^{-3}}\overrightarrow{u_x} = 0{,}4.10^{-4}$ $(mmol.s^{-1}.m^{-2})$ $\overrightarrow{u_x}$
Il faut faire attention aux unités et bien se placer dans le SI. De plus le sens positif arbitraire est important, c'est lui qui donne le signe de $\Delta C=C_2-C_1$ et Δx=x_aprés_membrane-x_avant_membrane dans notre cas, soit $\Delta C < 0$ et $\Delta x > 0$. Pour les conversions, ne pas oublier que $1litre=1dm^3=10^{-3}m^3$. Pour la conversion de cm à cm² ou cm³, il est possible d'utiliser $1cm=10^{-2}m$ donc en élevant tout au carré, $1cm^2=10^{-4}m^2$.

3) l'intensité du débit traversant la membrane est de $0{,}4.10^{-6}$ $mmol.s^{-1}$
Faux, on a $\vec{J} = \vec{j}.S = 0{,}4.10^{-4}$ $(mmol.s^{-1})$ $\overrightarrow{u_x}$ car la surface de la section vaut 1m²

4) à l'équilibre on aura 0.3mM dans chaque bac

Faux, à l'équilibre on aura $C_{eq} = n_{tot}/V_{tot} = (C1.V1+C2.V2)/V_{tot}$

$$C_{eq} = C1\left(\frac{1}{4}\right) + C2\left(\frac{3}{4}\right) = 0{,}5\left(\frac{1}{4}\right) + 0{,}1\left(\frac{3}{4}\right) = 0{,}2mM$$

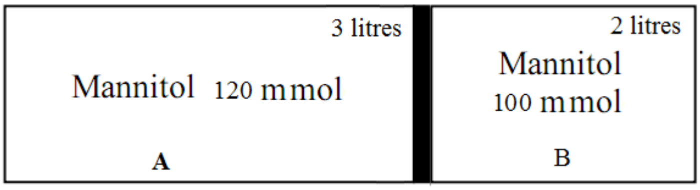
5) l'équilibre sera atteint entre les deux compartiments au bout de 0,2 heure

Faux, l'équilibre sera atteint quand le compartiment 1 sera passé de 0,5mM à 0,2mM, il faut donc qu'il y ait diffusion de Δn particules, avec dans le cas de l'enceinte 1 $\Delta n = n_i - n_f$ (c'est l'opposé dans le cas de l'enceinte 2). $n_i = C1.V1$ et $n_f = Ceq.V1$ ce qui donne, $\Delta n = 0{,}15.10^3$ mmol de soluté (attention V=0,5m²). D'après 3) on sait que $\frac{\partial n}{\partial t} = 0{,}4.10^{-4}$ mmol.s^{-1} donc $\Delta t = \left(\frac{\Delta n}{0{,}4.10^{-4}}\right) = 10^7 s \gg 1h$(=3600s)

QCM 4

Exercice sur le potentiel chimique

Soit 2 enceintes A et B séparées par une membrane imperméable d'épaisseur 2mm et contenant chacune du solvant et des solutés comme représenté dans le schéma suivant. A l'instant t=0 on enlève la membrane. On donne le potentiel chimique de référence du mannitol pour une concentration de 50mmol/litre valant μ_m^0=5000 J/mol, le coefficient de diffusion D=2,5cm^2.s^{-1} et on rappelle que RT=2500J/mol



a) le flux de solutés se fait de A vers B

Faux, le flux va du compartiment de plus forte concentration vers celui de plus faible concentration C_A= 40mmol/l et C_B= 50mmol/l. De plus le solvant va dans le sens contraire

b) un flux d'eau de même sens suit le flux de soluté

Faux, le sens sera opposé

c) le coefficient de friction vaut 1.10^{-16} Kg.s^{-1}

Faux, la relation d'Einstein donne $D = \left(\frac{kT}{f}\right)$, donc $f = \left(\frac{RT}{D.Na}\right)$=2500/(2,5.10^{-4}.6.10^{23})

$$=\left(\frac{1}{6}\right).10^{-16} Kg.s^{-1}$$

Le coefficient est donc inférieur à 1.10^{-16} Kg.s^{-1}

d) le potentiel chimique du mannitol dans le compartiment A est supérieur au potentiel chimique du mannitol dans le compartiment B (avant d'avoir enlevé la membrane)

Faux, on a $\mu_A = \mu_0 + RTln(\frac{C_A}{C_0})$=5000+2500.ln $(\frac{40}{50})$=5000-500=4500J/mol, pour B, on a μ_B = 5000J/mol. Donc $\mu_B > \mu_A$

e) les concentrations tendent à s'égaliser mais n'atteignent jamais l'équilibre.

Faux, au bout d'un moment l'équilibre sera atteint. On aura $\mu_A = \mu_B$ ce qui correspond à $C_A = C_B$ soit $C_\infty = 44mmol/l$

QCM 5

Exercice classique de diffusion

Soit une solution d'hémoglobine de concentration 0,6mol/l qui diffuse à travers une membrane de surface diffusante S=10cm² jusqu'à une concentration de 0.1mol/l.
On donne $D_{Hb}=10^{-6}$cm²/s

a) la masse d'hémoglobine qui s'est déplacée de 10cm pendant 30s vaut 10,5g
b) la masse d'hémoglobine qui s'est déplacée de 10cm pendant 30s vaut 1,05mg
c) la masse d'hémoglobine qui s'est déplacée de 10cm pendant 30s vaut 105g
d) la masse d'hémoglobine qui s'est déplacée de 10cm pendant 30s vaut 0,105g
e) la masse d'hémoglobine qui s'est déplacée de 10cm pendant 30s vaut 1,05kg

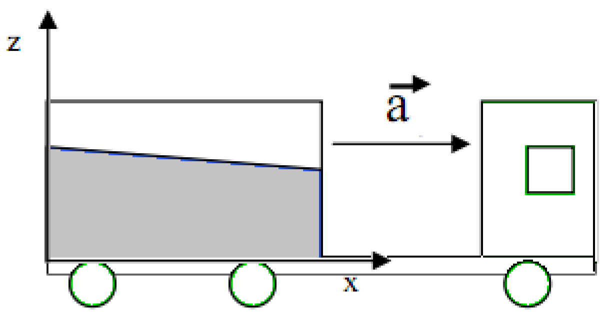
Il suffit d'utiliser la formule classique $J = \frac{\Delta n}{\Delta t} = -D.S.\frac{\Delta C}{\Delta x}$ or $n = (\frac{m}{M})$ donc $\Delta m = -D.S.M.\Delta t.\frac{\Delta C}{\Delta x}$, on remplace et on obtient 1,05mg ($\Delta C < 0$).

Exercices Complémentaires

QCM 6

Exercice (relativement compliqué !) mêlant la mécanique des fluides et la mécanique des solides / notion de calcul différentiel.

Un liquide de masse volumique ρ se trouve dans un réservoir cubique d'arête $\sqrt[3]{2}$ mètres (V = 2m^3). Le réservoir est à moitié rempli et il subit une accélération linéaire constante de valeur $\vec{a}=2\vec{u_x}$ (m.s^{-2}), on considérera la force d'inertie d'entrainement comme égale à $-\rho.\vec{a}$.



a) le fluide est soumis à une force liée à son propre poids $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10\rho \end{pmatrix}$ et à une force liée à son inertie $\vec{F} = \begin{pmatrix} -2\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vrai, c'est la définition du poids et de la force d'entrainement comme définit dans l'énoncé, (le volume de fluide est de 1 m^3), on a donc la force totale

$$\vec{F} + \vec{P} = \begin{pmatrix} -2\rho \\ 0 \\ -10\rho \end{pmatrix}$$

b) en appliquant la relation fondamentale de la statique des fluides on peut dire que la pression au sein du fluide peut est représentée par P=P(y,z)

Faux, soit la relation fondamentale de la statique des fluide appliquée à notre problème, grad(P)= $\vec{F} + \vec{P}$, on a donc $\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\rho \\ 0 \\ -10\rho \end{pmatrix}$. Cela signifie que $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ donc P ne dépend pas de la variable y, on a donc plus précisément P=P(x,z)= $-2\rho x - 10\rho z + cte$

c) si on pose que l'expression de la variation de pression s'écrit dP $= \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz$ alors on a dP=-2ρ(dx+5.dz)

Vrai, on sait qu'une différentielle « totale exacte » peut s'exprimer sous la forme dP $= \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz$, en remplaçant les différentielles par leurs valeurs analytiques, on obtient : dP=$-2\rho dx - 10\rho dz$ = -2ρ(dx+5.dz)

d) si on pose dP=0 alors on a $z = -5$.x+Cte ce qui correspond à l'ensemble des courbes isobares (courbes représentant les pressions identiques)

Faux si dP=0 alors il vient -2ρ(dx+5.dz)=0 donc $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{5}$

En intégrant cette équation différentielle, on a z = $-\frac{1}{5}$ x + Cte cette équation représente l'ensemble des isobares.

e) la surface du fluide est décrite par l'équation 5z + x - 6 = 0

Vrai, on cherche l'isobare qui décrit la surface du fluide. Pour cela il suffit de trouver la valeur de la constante de la question précédente correspondant à l'interface air/fluide. L'hypothèse consiste à dire que le volume total du fluide est constant, on a volume_fluide=b.b/2=b²/2 car le réservoir est à moitié rempli. Cela revient à dire que

$$\int_0^b z(x) = \frac{b^2}{2}$$

En intégant, on a $[-\frac{1}{5.2}\, x^2 + Cte.x]_0^b = \frac{b^2}{2}$ => Cte = $\frac{3}{5}.b$ = 6/5

En replaçant cette valeur dans z = $-\frac{1}{5}$ x + Cte, on obtient : 5.z = -x + 6, soit 5z + x - 6 = 0 qui est donc l'équation de la surface du fluide.

QCM 7

Exercice sur le calcul du gradient d'un champ scalaire

Soit 2 champs scalaires A(x,y,z)=3x+z² et B(r,θ,z) = r.sin²(θ). On pose que le gradient en coordonnées cylindriques (r,θ,z) d'une fonction *f* est $\overrightarrow{grad}(f)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}.\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

a) $\overrightarrow{grad}(A)=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ z^2 \end{pmatrix}$ en coordonnées cartésiennes

Faux, la solution est $\begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} \\ \frac{\partial A}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2.z \end{pmatrix}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(A).\overrightarrow{u_z}=2z$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(A).\overrightarrow{u_y}=0$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(A).\overrightarrow{u_x}=3$

b) $\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{grad}(A).\overrightarrow{u_z})=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ en coordonnées cartésiennes

Vrai, $\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{grad}(A).\overrightarrow{u_z})=\overrightarrow{grad}(2.z)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{grad}(A).\overrightarrow{u_z}).\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{grad}(A).\overrightarrow{u_x})=0$ en coordonnées cartésiennes

Vrai, $\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{grad}(A).\overrightarrow{u_z}).\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{grad}(A).\overrightarrow{u_x}) = \overrightarrow{grad}(2z).\overrightarrow{grad}(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0$

d) $\overrightarrow{grad}(B)=\begin{pmatrix} sin^2(\theta) \\ 2.\sin(\theta).\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$ en coordonnées cylindriques

Vrai, $\overrightarrow{grad}(B) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r.\sin^2(\theta)}{\partial r} \\ \frac{1}{r}.\frac{\partial r.\sin^2(\theta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial r.\sin^2(\theta}{\partial z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sin^2(\theta) \\ 2.\sin(\theta).\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\|\overrightarrow{grad}(B)\|=\sin(\theta)$ en coordonnées cylindriques

Faux, $\|\overrightarrow{grad}(B)\| = \sqrt{sin^4(\theta) + 4\sin^2(\theta).\cos^2(\theta)}=\sin(\theta)\sqrt{sin^2(\theta) + 4.\cos^2(\theta)}$